Διάλεξη 17η 6/12/2018

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις Euler: $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \; (=b)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $x \neq 0$. $\begin{pmatrix} x>0 \\ \text{ή} \\ x<0 \end{pmatrix}$

• $x>0$, αλλαγή μεβ. $t = \log x$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 σελ 112 $x^3 y''' - x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$ (1)

B.C Για $x<0 \Rightarrow n=-x$, $n>0$.

$t = \log x$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{xy' = \frac{dy}{dt}}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$\frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 y'' = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}}$$

$$y''' = \dots \Rightarrow \boxed{x^3 y''' = 2\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3}}$$

αντικατάσταση στην (1):

$$2\frac{dy}{dt} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 4y = 0.$$

$$\dots \frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4y = 0.$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda-4) + (\lambda-4) = 0$$

$$(\lambda^2+1)(\lambda-4) = 0 \quad \text{β.σ.λ} \left\{e^{4t}, \sin t, \cos t\right\} \xrightarrow{t=\log x} \left\{e^{4\log x}, \sin\log x, \cos\log x\right\}$$

$$= \left\{x^4, \sin(\log x), \cos(\log x)\right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6 i) $x^2y'' - xy' + y = 0 \quad x>0$

από πριν

$xy' = \frac{dy}{dt}$

$x^2y'' = -\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}$

$t = \log x$

$$-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (διπλή)

β.σ.λ $\{e^t, te^t\} \xrightarrow{t=\log x}$ β.σ.λ $\{x, x\log x\}$ $x>0$

ΑΣΚ 6 iii) $(x-2)^2y'' - (x-2)y' + y = 0 \quad x>2$

Θα θέσω $u = x-2 \Rightarrow u^2y''(u) - uy'(u) + y(u) = 0, \quad u>0 \quad (1)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 1\,\frac{dy}{du}$$

Παρατηρώ ότι (1) είναι όπως η 6 i) οπότε.

β.σ.λ $\{u, u\log u\}$ $u>0$ $\xrightarrow{u=x-2}$ $\{(x-2), (x-2)\log(x-2)\}$ $x>2$

ΑΣΚ 7 i $y(1)=1,\ y'(1)=0$

Π.Α.Τ

$x^2y'' - xy' + y = 0$, β.σ.λ $\{x, x\log x\}$ $x>0$

Λύση

$y(x) = c_1x + c_2x\log x$

$y(1)=1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$y'(x) = c_1 + c_2\log x + c_2x\frac{1}{x}$

$y'(1)=0 \Rightarrow 1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -1}$

Άρα $y(x) = x - x\log x$

ΑΣΚ 8ι) $5x^2y'' - 3xy' + 3y = \underbrace{x^{1/2}}$, $x>0$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ.

Θα πάω να βρω το β.σ.λ από την ομογενή

$$5x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \quad , x>0$$

$t = \log x$

$$5\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) - 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$5\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$5\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3/5 \end{cases} \quad \text{β.σ.λ } \{e^t, e^{3/5 t}\} \xrightarrow{t=\log x}$$

$$\text{β.σ.λ } \{x, e^{3/5 \log x}\} \Rightarrow \{\underset{y_1}{x}, \underset{y_2}{x^{3/5}}\} \quad x>0.$$

Ορίζουσα Wronski (ξανά βλέπω, πρέπει να υπάρχει λάθος)

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^{3/5} \\ 1 & \frac{3}{5}x^{-3/5} \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5} - 1\right)x^{3/5} = -\frac{2}{5}x^{3/5}$$ και

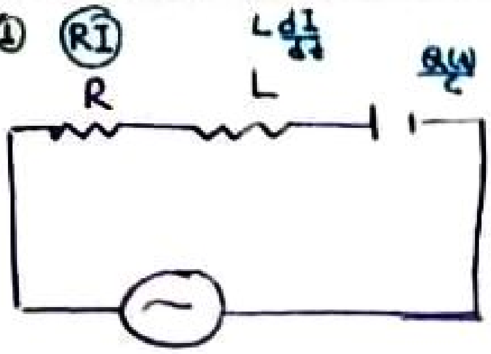
$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} = -x^{3/5}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} = x$$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_1^x \frac{W_1(s)}{W(s)}\frac{b(s)}{a_2(s)}ds + y_2(x)\int_1^x \frac{W_2(s)}{W(s)}\frac{b(s)}{a_2(s)}ds$$

$$y_\mu(x) = x\int_1^x \frac{-s^{3/5}}{-\frac{2}{5}s^{3/5}} \cdot \frac{s^{1/2}}{5}ds + x^{3/5}\int_1^x \frac{s}{-\frac{2}{5}s^{3/5}}\frac{s^{1/2}}{5}ds$$

πχ ①



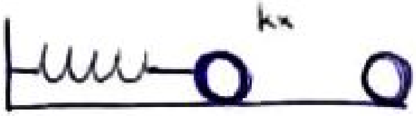
Τάση στα άκρα του κυκλώματος

$$RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=E \Rightarrow RI(t)+L\frac{dI}{dt}(t)+\frac{Q(t)}{C}=E(t)$$

$$RI(t)+LI'(t)+\frac{Q(t)}{C}=E(t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} RI'(t)+LI''(t)+\frac{1}{C}Q'(t)=E'(t)=f(t)$$

$$RQ'(t)+LQ''(t)+\frac{1}{C}Q(t)=E(t) \qquad \Rightarrow \boxed{LI''(t)+RI'(t)+\frac{1}{C}I(t)=f(t)} \neq a\cos(\omega t).$$

π.χ ② ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ.



$mx''=-kx$ (επιτάχυνση)

$mx''+kx=0$

$x''+\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}x=0$ (έχει λύσεις cos και sin) $(\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t)$

$\boxed{mx''+kx=f_0\cos(\omega t)}$ (Εξαναγκασμένη ταλάντωση)

Παίρνω λύσεις από αυτήν την Εξίσωση

$$\underbrace{x''+\omega_0^2 x=f_0\cos(\omega t)}$$

1η περίπτωση $\omega \neq \omega_0$: $x(t)=\left(x_0-\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega}\right)\cos(\omega_0 t)+\frac{u}{w_0}\sin(\omega_0 t)+\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$

2η περίπτωση $\omega=\omega_0$ $x(t)=\underbrace{x_0\cos(\omega_0 t)}_{\text{φραγμένο}}+\underbrace{\frac{u_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}_{\text{φραγμένο}}+t\frac{f_0}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

όσο περνάει ο χρόνος αυξάνει η τιμή

Γιατί βγάζει διαφορετική λύση; ?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Από την $y_p(t)$ κάποιο είναι ω και κάποιο ω_0.

$$y_\mu(x) = \ldots = \ldots \int_0^t \sin(\omega_0 t)\cdot\sin(\omega_0 s)\,ds \longrightarrow ①$$

$$\int_0^t \sin^2(\omega_0 t)$$

$$= \int_0^t -\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 s)\,ds +$$

Διαφορική εξίσωση ατάξης

$$\left.\begin{aligned} &y' = f(t,y) \\ &f(-t,y) = -f(t,y) \end{aligned}\right\} \to \text{άρτιες λύσεις}$$

Για $t=0$ $\quad f(0,y) = f(-0,y) = 0$

Όλες οι λύσεις αρχίζουν από το ίδιο σημείο.

$$z(t) = y(-t) \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} z'(t) = -1\,y'(-t) = -f(-t,y) = -\left(-f(t,y(-t))\right)$$

$$z'(t) =$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> $y''+y = 3x^2 - 4\sin x$

$\quad \hookrightarrow y''+y = 3x^2 \to y_1$ $\qquad$ από Θ. Υπέρθεσης

$\quad \hookrightarrow y''+y = -4\sin x \to y_2$ $\qquad y_\mu = y_1 + y_2$

$$y''+py = \sin(\omega t)$$

$\boxed{\text{Προσοχή}}$: αν p και ω έχουν κάποια σχέση τότε δεν μπορώ να αποφανθώ ότι η λύση είναι $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = 0$

B-25

$y'' + ay = 0$, $a \in C(I)$, $I = (x_1, x_2)$

(Υπόδειξη)
Νδο αν y λυση τότε μεμονωμένες ρίζες.

Μπορεί η $\sin\frac{1}{x}$ να είναι λυση της $y''+ay=0$

OXI

Έστω y_0 λυση και x_0 ρίζα

$y'(p_1)=0$ απο Θ. Rolle

x_1 x_2

$y(x_0)=0$

x_ν ρίζα της $y(x)$ με $x_\nu \to x_0$

$$\begin{array}{l|l} y(x_1)=0 & y'(p_1)=0 \\ y(x_2)=0 & y'(p_2)=0 \\ y(x_\nu)=0 & y'(p_\nu)=0 \end{array}$$

Απο την συνέχεια και το Θ.Rolle

$$\lim y'(p_\nu)=0 \to y'(\underbrace{\lim p_\nu}_{x_0})=0 \ , \ \eta \ p_\nu \to x_0$$

$$\to y'(x_0)=0$$

B-14

$$\underbrace{x^2y''+xy}_{\text{θα μπορούσε να είναι Euler}} + \left(x^2-\frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (1)$$

από

Νδο $y_1(x)=$ γρ ανεξ λύσεις.

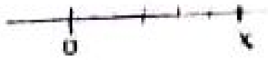
$y_2(x)=$

Αντικατάσταση στην (1) και μετά με ορισμό ή Wronski θα δείξω ον είναι γρ. ανεξ

B-51

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $b \in C[0,\infty)$ για την οποία $\exists\, C>0 : \int_x^{x+1} |b(s)|\,ds \le C \quad \forall\, x>0$

Τοτε ναο $e^{-x}\int_0^x e^s |b(s)|\,ds \le \frac{Ce}{e-1}$ $x>0$ φραγμ.



$$e^{-x}\int_0^x e^s|b(s)|\,ds = \left(\int_{x-1}^{x} e^s|b(s)|\,ds + \int_{x-2}^{x-1} + \dots + \int_0^{x-[x]}\right)e^{-x}$$

$$\le \left(e^x\int_{x-1}^{x}|b(s)|\,ds + e^{x-1}\int_{x-2}^{x-1}|b(s)|\,ds + \dots + e^{x-[x]}\int_0^{x-[x]}|b(s)|\,ds\right)e^{-x}$$

$$= e^{-x}\cdot\left(e^x C + e^{x-1}C + \dots + e^{x-[x]}\cdot C\right)$$

$$= e^{-x}\cdot C\cdot e^x\left(1+e^{-1}+e^{-2}+\dots e^{-[x]}\right)$$

$$= C\left(1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\dots\frac{1}{e^{[x]}}\right)$$ γεωμ σειρά θετικων όρων

$$\le C\,\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{C\cdot e}{e-1}$$

Ναο ολες οι λυσεις της $y''+2y'+2y=b$ ειναι φραγμενες

χπ $\lambda^2+2\lambda+2=0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2\pm i2}{2} = -1\pm i \qquad \left\{e^{-x}\cos x \quad e^{-x}\sin x\right\}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} \overset{\text{πράξεις}}{=} \dots = \dots = e^{-2x}$$

$$y_\mu(x) = e^{-x}\cos x\int_0^x \frac{-e^{s}\sin s}{e^{-2s}}\,b(s)\,ds + e^{-x}\sin x\int_0^x \frac{e^{-s}\sin s}{e^{-2s}}\,b(s)\,ds$$

$$|y_\mu(x)| \le e^{-x}|\cos x|\int \dots |b(s)| + \dots |\sin x|\int \dots |b(s)|$$

$$\le e^{-x}\int_0^x e^s|b(s)|\,ds + e^{-x}\int_0^x e^s|b(s)|\,ds \le \frac{2Ce}{e-1}$$

B-59 παρόμοια ασκ με B-51

B-47 $y''+2ay'+\beta y=\phi$ $\quad a>0$ $\quad \beta>a^2$ $\quad$ φ συνεχής, φραγμ

Μπορεί και να μην ∃

→ λυσεις φραγμ

→ $\underbrace{\text{παραγ λυσ φραγμ}}$

↓ (παράγωγος μερικής) → $y_\mu(x)=e^{-ax}\cos(\tau x)\int_0^x \frac{(e^{-ax} \quad)}{w(s)}\phi(s)\,ds+\dots$

ΠΡΩΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΖΩ ΚΑΙ ΕΠΕΙΤΑ ΚΑΝΩ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

$=\underbrace{e^{-ax}\cos(\tau x)\int_0^x \frac{\quad}{\quad}\phi(s)ds}_{\text{Αυτο ξερω οτι ειναι φραγμενο}}+\underbrace{(e^{-ax} \quad)\frac{w_1(x)}{W(x)}|\phi(x)|}_{\text{αυτό πρεπει να το μελετήσω}}$

B-39 (ΚΑΛΗ ΑΣΚ) (εύκολη)

$y^{(n)}+ \quad +a_1y'+a_0y=b$ $\quad a_i\in\mathbb{R}$, $b\in C(\mathbb{R})$

y_0: λύση της (E_0) με $y_0(0)=0=\dots=y_0^{(n-2)}(0)$, $y^{(n-1)}(0)=1$

$\rightarrow \underbrace{y_\mu(x)}=\int_0^x y_0(x-s)\,b(s)\,ds$ λυση της E

Το παραγωγίζω n-φορές και το αντικαθιστώ

$y'_\mu(x)=y_0(x-x)\,b(x)+\int_0^x y_0'(x-s)\,b(s)\,ds$

$y''_\mu(x)=y_0'(x-x)\,b(x)+\int_0^x y_0''(x-s)\,b(s)\,ds$

⋮